Journal of Pure and Applied Algebra 38 (1985) 353-366
North-Holland

COHOMOLOGIE DE HARRISON ET ESPACES PROJECTIFS TRONQUES

Daniel TANRÉ
ERA au CNRS 07 590, Université de Lille, UER de Mathématiques Pures et Appliquées, 59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France

Communicated by J.D. Stasheff
Received 21 January 1985
Revised 23 April 1985

Dedicated to Jan-Erik Roos on his 50-th birthday

L'espace projectif tronqué $\mathbb{CP}_n^\infty$ s'obtient comme cofibre de l'injection de l'espace projectif complexe de dimension n, $\mathbb{CP}^n$, dans la limite inductive $\mathbb{CP}^\infty$ des $\mathbb{CP}^j$. En continuation de [6], nous déterminons son type d'homotopie rationnelle. Nous explicitons également les déformations, à algèbre de cohomologie ou algèbre de Lie d'homotopie, rationnellement fixées.

Ceci nécessite d'abord le rappel des définitions suivantes, classiques en théorie du modèle minimal:

Définitions. Un espace X, 1-connexe, à nombres de Betti finis, est:
- *formel* si son type d'homotopie rationnelle se déduit de son algèbre de cohomologie rationnelle,
- *intrinsèquement formel* si son algèbre de cohomologie rationnelle est réalisée par un seul type d'homotopie rationnelle,
- *coformel* s'il admet un modèle de Sullivan à différentielle quadratique,
- *faiblement coformel* si la suite spectrale, obtenue en filtrant son modèle de Sullivan par la longueur des mots, se stabilise au niveau 2.

Les principaux résultats obtenus s'énoncent alors:

Théorème. *Rationnellement, il existe deux espaces $\mathbb{CP}_n^\infty$ et X_n^0 ayant même algèbre de Lie d'homotopie rationnelle que $\mathbb{CP}_n^\infty$. L'espace projectif tronqué $\mathbb{CP}_n^\infty$ n'est pas coformel (mais faiblement coformel); X_n^0 est l'espace coformel associé. Ils sont tous deux intrinsèquement formels. X_{n-1}^0 se fibre rationnellement de façon unique sur $K(\mathbb{Q},2n)$, de fibre $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$. Les fibrations $F_\lambda : \bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)} \to \mathbb{CP}_{n-1}^\infty \to K(\mathbb{Q},2n)$ sont paramétrées par $\lambda \in \mathbb{Q}$ et classifiées par: F_λ et $F_{\lambda'}$ ont même type d'homotopie rationnelle si et seulement si $(\lambda/\lambda')^{1/n} \in \mathbb{Q}$.*

0022-4049/85/$3.30

Toute algèbre de cohomologie dont les relations forment une suite régulière est intrinsèquement formelle [3]. Hormis ce cas, $\mathbb{CP}_n^\infty$ et X_n^0 fournissent les premiers exemples d'espaces intrinsèquement formels, à cohomologie non bornée.

Effectuons un inventaire des méthodes utilisées. Soit x un générateur de $H^{2n}(\mathbb{CP}_{n-1}^\infty;\mathbb{Q})$; 'l'autopsie du meurtre' [5] de x fournit les premiers résultats. L'algèbre de cohomologie $H^*(\mathbb{CP}_{n-1}^\infty;\mathbb{Q})$ est un module libre sur l'algèbre graduée commutative libre Λx; l'évaluation en $x=1$ transforme alors la victime en 'témoin muet' et fait apparaître des algèbres $\mathbb{Z}_n$-graduées. Enfin, le théorème provient aussi de l'interprétation des déformations comme classes de cohomologie de Harrison; rappelons brièvement ce point: le corps de référence est le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels; pour tout espace vectoriel W, notons $\# W$ l'espace vectoriel dual. Soit V un espace vectoriel gradué, de dimension finie en chaque degré; l'injection canonique de l'algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(V)$ dans l'algèbre tensorielle $T(V)$ fournit, par dualité, une application de $\# T(V)$ dans $\# \mathbb{L}(V)$. Le noyau de cette dernière est constitué des éléments décomposables du produit mixé (shuffle product [7]). Ainsi, pour tout espace vectoriel W, il y a correspondance bijective entre $\mathrm{Hom}(\# \mathbb{L}(V), W)$ et l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\# T(V), W)$, formé des applications linéaires s'annulant sur les décomposables du produit mixé. Cette liaison représente la clef du passage [12] entre la cohomologie de Harrison et les obstructions à la déformation introduites par Halperin et Stasheff; elle fournit la formalité intrinsèque cherchée. Cette application topologique de la cohomologie de Harrison illustre parfaitement l'interpénétration algèbre-topologie, mise en évidence par Jan-Erik Roos [8].

L'article s'ordonne comme suit: dans le premier paragraphe, nous écrivons $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$ comme espace total d'une fibration (Théorème 1) et en déduisons la différentielle de son modèle de Sullivan (Théorème 2). Nous explicitons également l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$ et ses structures d'ordre supérieur. L'étude de la coformalité de $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$ termine cette subdivision (Théorème 3). Les démonstrations utilisent des lemmes permettant l'application à d'autres exemples éventuels. Dans le deuxième paragraphe, nous nous intéressons aux espaces X_{n-1} ayant même algèbre de Lie d'homotopie rationnelle que $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$. La cohomologie de Harrison et son application aux déformations de $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$ et X_{n-1} font l'objet du troisième paragraphe.

Quant aux notations, $(\mathbb{Z}_n, \pm)$ désigne le groupe des entiers relatifs modulo n. Si α est un cocycle, sa classe est notée $[\alpha]$. Les définitions et notations usuelles des modèles minimaux ne sont pas rappelées; ce sont en particulier celles de [11].

La richesse de cet exemple m'a été signalée par J.M. Lemaire. Je tiens également à remercier S. Halperin, D. Lehmann et M. Schlessinger pour l'aide apportée au cours de ce travail.

1. Type d'homotopie rationnelle de $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$

1.1. Algèbre de cohomologie rationnelle. Formalité

Proposition 1. *$\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$ est un espace formel d'algèbre de cohomologie rationnelle $\Lambda x \otimes \Lambda(y_1, \ldots, y_{n-1})/\mathscr{R}$, avec $x = y_0$ de degré $2n$, y_i de degré $2(n+i)$; $\mathscr{R}$ est l'idéal engendré par:*

$$y_i y_j - x\, y_{i+j} \quad , \quad si\ i+j \le n-1,$$

$$y_i y_j - x^2 y_{i+j-n}, \quad si\ i+j \ge n.$$

Démonstration. Soit a de degré 2; le noyau de $\Psi : (\Lambda a, 0) \to (\Lambda a / a^n, 0)$ fournit un modèle de $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$, [2]. L'énoncé ci-dessus le décrit par générateurs et relations. □

Remarque. Constatons dès à présent que les générateurs de l'idéal des relations de $H^*(\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}; \mathbb{Q})$ ne forment pas une suite régulière pour $n \ge 3$.

Pour la suite, nous avons besoin de l'écriture explicite du modèle; c'est le but du paragraphe suivant.

1.2. $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$: espace total d'une fibration

Définition 1. Une fibration $F \to E \to B$ est *formelle* lorsqu'elle a même modèle que les applications induites en cohomologie:

$$H^*(F; \mathbb{Q}) \leftarrow H^*(E; \mathbb{Q}) \leftarrow H^*(B; \mathbb{Q}).$$

Théorème 1. *Soit $f_n : \mathbb{CP}^{\infty}{}_{n-1} \to K(\mathbb{Q}, 2n)$ un représentant de la classe de cohomologie de plus bas degré de $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$. La fibre homotopique de f_n a le type d'homotopie rationnelle du bouquet de sphères $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$; la fibration de Serre associée se stabilise au niveau* 2 (*totalement non cohomologue à zéro* [9]); *le connectant de la suite exacte longue d'homotopie rationnelle est nul.*

Il se déduit directement des deux lemmes suivants:

Lemme 1. *Soient Y un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué et x un élément de degré $2n$. Soit $\mathscr{R}$ un idéal de $\Lambda x \otimes \Lambda Y$, notons $\mathscr{R}'$ l'idéal de ΛY obtenu par la projection naturelle $\Lambda x \otimes \Lambda Y \to \Lambda Y$. Supposons $(\Lambda x \otimes \Lambda Y)/\mathscr{R}$ isomorphe, comme Λx-module, à $\Lambda x \otimes (\Lambda Y / \mathscr{R}')$.*

Alors, si $(\Lambda Z, d)$ est le modèle bigradué [3] *de $\Lambda Y / \mathscr{R}'$, il existe une différentielle D telle que $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D)$ soit un KS-modèle* [2] *de $(\Lambda x, 0) \to ((\Lambda x \otimes \Lambda Y)/\mathscr{R}, 0)$. En munissant Z de sa TJ-graduation* [11] *et x du TJ-degré zéro* (*notés inférieurement*), *il vérifie:*

$$H_+(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D) = 0, \qquad DZ_p \subset (\Lambda x \otimes \Lambda Z)_{p-1}.$$

En particulier, $(\Lambda x, 0) \to ((\Lambda x \otimes \Lambda Y)/\mathscr{R}, 0) \to (\Lambda Y/\mathscr{R}', 0)$ *est un modèle (non libre) d'une fibration totalement non cohomologue à zéro.*

Démonstration. Choisissons d'abord un système de générateurs $(\Phi_i)_{i\in I}$, (resp. $(\Omega_i)_{i\in I}$), de $\mathscr{R}'$ (resp. $\mathscr{R}$) tel que $\Omega_i = \Phi_i + x\Omega_i'$. Si $\alpha_i \in Z_1$ vérifie $d\alpha_i = \Phi_i$, on pose $D\alpha_i = \Omega_i$.

Soit $\Phi \in (\Lambda Z)_1$ tel que $d\Phi = 0$, alors $D\Phi$ est défini et de la forme $D\Phi = x\Omega$. Par construction, $x\Omega \in \mathscr{R}$, d'oú $\Omega \in \mathscr{R}$, car $(\Lambda x \otimes \Lambda Y)/\mathscr{R}$ est un Λx-module libre par hypothèse. Il s'ensuit l'existence de $\Gamma \in Z_1$ tel que $D\Gamma = \Omega$.

Si $\beta \in Z_2$ a pour différentielle $d\beta = \Phi$, on pose $D\beta = \Phi - x\Gamma$.

Filtrons $(\Lambda x \otimes \Lambda Z_{\leq 2}, D)$ par le degré en x, on obtient une suite spectrale de Serre [2]. La TJ-graduation passe aux termes de la suite spectrale; en particulier, le terme E_2 vérifie:

en TJ-graduation 0: $(E_2)_0 = \Lambda x \otimes (\Lambda Y/\mathscr{R}')$,

en TJ-graduation 1: $(E_2)_1 = 0$,

d'où $H_1(\Lambda x \otimes \Lambda Z_{\leq 2}, D) = 0$.

Le prolongement complet $D - d$ de d s'acquiert similairement, par récurrence sur la TJ-graduation de ΛZ, en supposant avoir construit $(\Lambda x \otimes \Lambda Z_{\leq n}, D)$ tel que:

$$H_{n-1}(\Lambda x \otimes \Lambda Z_{\leq n}, D) = 0,$$

$$DZ_p \subset \Lambda x \otimes (\Lambda Z)_{p-1} \quad \text{pour tout } p \leq n. \qquad \square$$

Lemme 2. *Reprenons les notations et hypothèses du Lemme 1. S'il existe un système de générateurs,* $\Omega_i = \Omega_i(0) + x\Omega_i'$, *de* $\mathscr{R}$ *tel que* Ω_i' *appartienne à l'idéal d'augmentation de* $\Lambda x \otimes \Lambda Y$, *alors* $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D)$ *est le modèle bigradué de* $(\Lambda x \otimes \Lambda Y)/\mathscr{R}$. *Dans ce cas, le connectant de la suite exacte longue d'homotopie de la fibration* $(\Lambda x, 0) \to (\Lambda x \otimes \Lambda Z, D) \to (\Lambda Z, d)$ *est nul.*

Démonstration. On constate, dans la démonstration du Lemme 1, que la différentielle D devient décomposable, d'où la première assertion. Le connectant de la suite exacte longue d'homotopie rationnelle s'obtient [2] avec la partie linéaire, (purement basique), de la différentielle d'un élément de la fibre. Celle-ci étant nulle, le résultat s'ensuit. $\square$

1.3. Modèle bigradué de $\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}$

Soit $(\Lambda x, 0) \to (\Lambda x \otimes \Lambda Z, D) \to (\Lambda Z, d)$ un KS-modèle [2] de $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)} \to \mathbb{CP}_{n-1}^{\infty} \to K(\mathbb{Q}, 2n)$. Exhibons d'abord un prolongement D particulier.

Définition 2. Un monôme $t \in \Lambda x \otimes \Lambda Z$, est 'de *longueur de mot en Z*' égale à q s'il se décompose en $t = x^p t_1 \ldots t_q$, avec $t_i \in Z$. Si $q = 0$ (resp. 1, 2), t est dit *constant* (resp. *linéaire, quadratique*) *en Z*.

Lemme 3. *Reprenons les notations et hypothèses du lemme 2; supposons de plus la fibre $(\Lambda Z, d)$ coformelle. Alors, le prolongement $D-d$ peut être choisi linéaire en Z sur $Z_{>1}$, linéaire ou constant en Z sur Z_1. Dans ce cas, il est unique.*

Démonstration. Par hypothèse, les générateurs Ω_i de $\mathscr{R}$ se décomposent en: $\Omega_i = \Omega_i(0) + \sum_{p\geq 1} x^p \Psi_p$, avec $\Psi_1 \in Z$, $\Psi_p \in Z$ ou $\Psi_p \in \mathbb{Q}$ si $p > 1$.

Le prolongement sur Z_1 est donc constant ou linéaire en Z. Pour des raisons de TJ-degré, les termes constants ne peuvent apparaître qu'en Z_1.

Existence d'un prolongement linéaire en Z. Soit $z \in Z_{n+1}$. Supposons avoir démontré l'existence d'un prolongement linéaire sur $(\Lambda Z)_{\leq n}$ et pour tout $z_l \in Z_{n+1}$ de degré inférieur à celui de z.

Par construction (Lemme 1): $Dz = \Phi - x\Gamma$, $D\Phi = x\Omega$, $D\Gamma = \Omega$. L'élément Φ étant quadratique par hypothèse, Ω est de longueur de mot en Z au plus 2. Filtrons Γ par la longueur des mots en Z: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_k$. Supposons $k > 1$. Comme seul élément de $D\Gamma - \Omega$ de longueur de mot en Z égale à $k+1$, $d\Gamma_k$ est nul. Il existe donc Λ_k avec $d\Lambda_k = \Gamma_k$.

L'hypothèse de récurrence s'applique à Λ_k. En remplaçant Γ par $\Gamma - D\Lambda_k$, on a abaissé sa longueur de mot en Z. Par itération du procédé, on choisit Γ linéaire en Z.

Unicité du prolongement linéaire. Si h et h' sont deux prolongements linéaires en Z, décomposons les suivant les puissances de x:

$$Dz = dz + \sum_{i\geq 1} x^i h_i(z), \qquad D'z = dz + \sum_{i\geq 1} x^i h_i'(z).$$

De $D^2 = 0$, on déduit $dh_1 + h_1 d = dh_1' + h_1' d = 0$, d'où $d(h_1 - h_1') = 0$, par récurrence sur le TJ-degré, et $h_1 - h_1' = 0$ par construction du modèle bigradué [3].

L'égalité $h = h'$ s'obtient alors par récurrence sur i. □

Il nous faut maintenant préciser *le modèle* $(\Lambda Z, d)$ de $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$ si V est un espace vectoriel gradué, de dual $\# V = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q})$, on note $j: s^{-1}\# T(V) \to s^{-1}\# \mathbb{L}(V)$ la transposée (désuspendue) de l'injection canonique $\mathbb{L}(V) \to T(V)$.

Soit H la cohomologie rationnelle réduite du bouquet $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$: et soit y_{i_j} l'élément de H représentant la sphère $S^{2(n+i_j)}$. Notons également y_{i_j} les générateurs correspondants de $s^{-1}\#\mathbb{L}(s^{-1}\# H)$ et de $s^{-1}\# T(s^{-1}\# H) \cong s^{-1} T(sH)$. L'élément $j(y_{i_0} \otimes \cdots \otimes y_{i_p})$ est désigné par $y_{i_0 \ldots i_p}$.

D'après [11], le modèle bigradué de $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$ est $(\Lambda s^{-1}\#\mathbb{L}(s^{-1}\# H), d)$ avec:

$$dy_{i_0 \ldots i_p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k y_{i_0 \ldots i_k} y_{i_{k+1} \ldots i_p}.$$

La TJ-graduation correspond à la longueur des crochets par orthogonalité:

$$Z_p = s^{-1}(\mathbb{L}^{p+2}(s^{-1}\# H))^{\perp}.$$

Soit D le prolongement construit dans le Lemme 3 pour le cas particulier de $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$. Dans l'expression:

$$Dz = dz + \sum_{i \geq 1} x^i h_i(z),$$

la puissance i de x se déduit de la connaissance de z et $h_i(z)$.

La différentielle D est donc entièrement déterminée par sa valeur en $x=1$. Notons D' cette dernière:

$$D'z = dz + \sum_{i \geq 1} h_i(z).$$

Nous avons perdu la compatibilité avec la $\mathbb{Z}$-graduation de départ. Nous récupérons cependant une $\mathbb{Z}_n$-graduation G sur $(\Lambda Z, d)$, définie par:

$$G(y_{i_0 \ldots i_p}) = 2\left(\sum_{0}^{p} i_j\right) - p \pmod{n},$$

$$G(yy') \equiv (G(y) + G(y')) \bmod n.$$

Etendons les multi-indices à $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, en posant:

$$y_0 = 1,$$

$$y_{i_0 \ldots i_p} = 0 \quad \text{si } p \geq 1 \text{ et s'il existe } i_j = 0.$$

Théorème 2. *Soient $(\Lambda Z, d)$ le modèle de $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$ et $(\Lambda x, 0)$ un modèle de $K(\mathbb{Q}, 2n)$. Dans le modèle bigradué $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D)$ de $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$, la différentielle D s'évalue en $x=1$, sur le système de générateurs précédent, par*

$$D' y_{i_0 \ldots i_m} = \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p y_{i_0 \ldots i_p} y_{i_{p+1} \ldots i_m} + \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} y_{i_0 \ldots i_j \pm i_{j+1} \ldots i_m},$$

où $\pm$ désigne la somme dans $\mathbb{Z}_n$.

Démonstration. Décomposons D' en $D' = d + D'_l$.

(1) Afin d'éviter la complexité de détermination d'une base d'algèbre de Lie libre, nous travaillons sur un système de générateurs. Il nous faut donc d'abord vérifier que D' a un sens. Pour la composante d, cela provient du modèle bigradué d'un bouquet de sphères.

Soit J la partie de $s^{-1} \# T(s^{-1} \# H)$ formée des éléments décomposables pour le produit mixé [11]; rappelons que la surjection canonique j a pour noyau J, [7]. Soit $\tilde{D}'_l$ l'application linéaire de source et but l'algèbre tensorielle ci-dessus, et définie par:

$$\tilde{D}'_l(y_{i_0} \otimes \ldots \otimes y_{i_m}) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} (y_{i_0} \otimes \ldots \otimes y_{i_j \pm i_{j+1}} \otimes \ldots \otimes y_{i_m}).$$

Un simple calcul de permutations montre que $\tilde{D}_l'$ est compatible avec le produit mixé; D_l' s'obtient comme passage au quotient de $\tilde{D}_l'$ par J.

(2) Redonnons leur $\mathbb{Z}$-degré aux éléments de Z. L'application D sur $\Lambda x \otimes \Lambda Z$ s'obtient en mettant la puissance convenable de x:

$$Dy_{i_0 \dots i_m} = dy_{i_0 \dots i_m} + \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} x^{\mu(j)} y_{i_0 \dots i_j \pm i_{j+1} \dots i_m}.$$

En décomposant $D = d + D_l$, l'égalité $D^2 = 0$ équivalent à $D_l^2 + dD_l + D_l d = 0$, dont la vérification ne présente pas de difficulté. La valeur de D' en Z_1, $D' y_{ij} = y_i y_j - y_{i \pm j}$, fournit bien la structure d'algèbre de $(H^*(\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}; \mathbb{Q}))_{x=1}$. En filtrant D par le degré en x, on constate $H_+(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D) = 0$. Le couple $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D)$ est donc le modèle bigradué cherché. $\square$

1.4. Algèbre de Lie d'homotopie rationnelle. Coformalité faible

Dans le Théorème 1, la nullité du connectant fournit directement:

Proposition 2. *Il existe une suite exacte courte d'algèbres de Lie:*

$$0 \to \mathbb{L}(\hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_{2n-1}) \to \pi(\Omega \mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\hat{x}_n) \to 0,$$

où $|\hat{x}_i| = 2i - 1$, $\mathbb{Q}(\hat{x}_n)$ *est une algèbre de Lie abélienne à un générateur.*

Remarque. Nous pouvons préciser le reste de la structure avec la différentielle du modèle de Sullivan; notons $x_i = s\hat{x}_i$. Dans la suite exacte ci-dessus, l'opération de $\hat{x}_n$ sur l'algèbre de Lie libre se décrit en crochet de Whitehead [11] par:

$$[x_n, x_n] = [x_n, x_{n+1}] = 0, \qquad [x_n, x_{n+2}] = [x_{n+1}, x_{n+1}],$$

plus généralement:

$$[x_n, x_{n+k}] = [x_{n+1}, x_{n+k-1}] + [x_{n+2}, x_{n+k-2}] + \dots$$

Les crochets de Whitehead d'ordre supérieur se déduisent également du modèle minimal [11]:

$$[x_n, x_n, x_n] = [x_{2n-1}, x_{n+1}] + [x_{2n-2}, x_{n+2}] + \dots,$$

$$[x_n, x_n, x_{n+1}] = [x_{2n-1}, x_{n+2}] + [x_{2n-2}, x_{n+3}] + \dots$$

Les autres crochets d'ordre 3, non obtenus par permutation des deux précédents, ainsi que les crochets de plus grand ordre, ne sont pas définis.

L'existence de crochets de Whitehead d'ordre supérieur préfigure la non coformalité de $\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}$:

Théorème 3. $\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}$ *est faiblement coformel, non coformel.*

Démonstration. La coformalité faible découle du lemme suivant. Pour la non coformalité, on vérifie sans peine que la différencielle D, précédemment explicitée, ne peut être rendue quadratique. □

Lemme 4. *Soit* $(\Lambda T, d') \to (\Lambda Z \otimes \Lambda T, D) \to (\Lambda Z, d)$ *une KS-extension minimale* [2], *modèle d'une fibration vérifiant:*

(1) *la base et la fibre sont faiblement coformelles,*

(2) *le connectant de la suite exacte longue d'homotopie est nul,*

(3) *la suite spectrale de Serre se stabilise au niveau* 2.

Alors, l'espace total est faiblement coformel.

Démonstration. Le connectant étant nul, la différentielle D n'a pas de terme linéaire. Pour un choix d'indécomposables Z et T fixé, soient D_q, d_q et d_q' les parties quadratiques de D, d et d' respectivement.

En filtrant $(\Lambda Z \otimes \Lambda T, D)$ par la longueur des mots, on obtient une première suite spectrale de terme $E_2 = H(\Lambda Z \otimes \Lambda T, D_q)$, d'aboutissement $E_\infty = H(\Lambda Z \otimes \Lambda T, D)$. Pour calculer E_2, on filtre $(\Lambda Z \otimes \Lambda T, D_q)$ par le degré en ΛT. On obtient une deuxième suite spectrale de terme $E_2' = H(\Lambda T, d_q') \otimes H(\Lambda Z, d_q)$ et d'aboutissement $E_\infty' = H(\Lambda Z \otimes \Lambda T, D_q)$.

D'après les hypothèses (1) et (3), E_2' est isomorphe à E_∞; les deux suites spectrales se stabilisent donc au niveau 2. □

2. Déformation, à algèbre de Lie d'homotopie fixée, de $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$

Soit X_{n-1} un espace ayant même algèbre de Lie d'homotopie rationnelle que $\mathbb{CP}_{n-1}^\infty$.

2.1. X_{n-1}: espace total d'une fibration

Proposition 3. *X_{n-1} s'écrit comme espace total d'une fibration formelle, totalement non cohomologue à zéro:* $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)} \to X_{n-1} \to K(\mathbb{Q}, 2n)$.

En particulier, X_{n-1} est formel.

Démonstration. Soient x un élément de degré $2n$ et $(\Lambda Z, d)$ le modèle du bouquet $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$. L'espace X_{n-1} admet un modèle minimal de la forme $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D})$. L'élément de plus bas degré, x, définit une classe de cohomologie; soit $p: X_{n-1} \to K(\mathbb{Q}, 2n)$ son application classifiante. Pour des raisons de degré, le connectant de la suite exacte longue d'homotopie de la fibration associée à p est nul. D'après la Proposition 2, la fibre homotopique de p a une algèbre de Lie d'homotopie libre; c'est un bouquet de sphères. Elle est donc formelle.

Soit $(\Lambda x, 0) \to (\Lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D}) \to (\Lambda Z, d)$ le KS-modèle de p. Pour des raisons de degré, les indécomposables de TJ-graduation 0 dans ΛZ sont des $\hat{D}$-cocycles, non

$\hat{D}$-cobords. Il s'ensuit la surjectivité de $H^*(X_{n-1};\mathbb{Q}) \to H^*(\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)};\mathbb{Q})$; (la fibration considérée est totalement non cohomologue à zéro [9]).

L'algèbre de cohomologie rationnelle de X_{n-1} a donc pour espace vectoriel sous-jacent: $\Lambda x \otimes \mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Soit $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D)$ le KS-modèle correspondant à $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$; la partie quadratique de $\hat{D}$ coïncide avec celle de D, notons la D_q. La suite $(\Lambda x, 0) \to (\Lambda x \otimes \Lambda Z, D_q) \to (\Lambda Z, d)$ est toujours une KS-extension. En filtrant par le degré basique, on obtient:

$$H_+(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D_q) = 0 \quad \text{d'où} \quad H_+(\Lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D}) = 0.$$

X_{n-1} étant ainsi un espace formel, il s'ensuit, par construction, la formalité de la fibration associée à p. □

Notons X^0_{n-1} l'espace coformel associé à $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$. D'après ce qui précède, X^0_{n-1} ayant pour algèbre de cohomologie rationnelle $H_0(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D_q)$, on obtient directement:

Corollaire. *X^0_{n-1} est un espace formel d'algèbre de cohomologie rationnelle: $\Lambda x \otimes \Lambda(y_1, \ldots, y_{n-1})/\mathscr{R}_0$, où x est de degré $2n$, y_i de degré $2(n+i)$, $\mathscr{R}_0$ est l'idéal engendré par:*

$$y_i y_j - x y_{i+j}, \quad si\ i+j \le n-1,$$

$$y_i y_j, \quad si\ i+j \ge n.$$

2.2. *Classification des espaces X_{n-1} et des fibrations associées*

Soient λ un nombre rationnel et $S(y)$ l'algèbre polynomiale engendrée par y, de degré 2. Désignons par $A_{n,\lambda}$ l'algèbre $\mathbb{Z}_n$-graduée ainsi définie par générateurs et relations: $A_{n,\lambda} = S(y)/(y^n = \lambda)$. Si $y_0 = 1, y_1, \ldots, y_{n-1}$, est la base canonique de $S(y)$, notons la loi d'algèbre par: $y_i y_j = \lambda(i,j) y_{i \pm j}$.

Remarque. On constate immédiatement:

- $\lambda(i,j) = 1$ si $i+j<n$ et $\lambda(i,j) = \lambda$ si $i+j \ge n$.
- Soient λ et λ' des rationnels non nuls, $A_{n,\lambda}$ est isomorphe à $A_{n,\lambda'}$ si et seulement si $(\lambda/\lambda')^{1/n} \in \mathbb{Q}$.

Définition 3. Deux fibrations $p: E \to B$ et $p': E' \to B$ ont *même type d'homotopie rationnelle* s'il existe une équivalence d'homotopie rationnelle $g: E \to E'$ telle que $p' \circ g = p$.

Proposition 4. *Les classes d'isomorphie d'algèbres $A_{n,\lambda}$ correspondent bijectivement aux types d'homotopie rationnelle des fibrations formelles, totalement non cohomologues à zéro,*

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)} \to X_{n-1} \to K(\mathbb{Q}, 2n),$$

d'espace total X_{n-1} ayant même algèbre de Lie d'homotopie rationnelle que $\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}$.

Démonstration. Si la fibration est donnée, l'algèbre $A_{n,\lambda}$ correspond à $(H^*(X_{n-1};\mathbb{Q}))_{x=1}$.

Réciproquement, l'algèbre $\mathbb{Z}_n$-graduée $A_{n,\lambda}$ engendre une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée positivement, d'espace vectoriel sous-jacent $\lambda x \otimes \mathbb{Q}(y_1, \dots, y_{n-1})$, avec $|x| = 2n$, $|y_i| = 2(n+i)$ et de loi: $y_i y_j = x^{\mu(i,j)} \lambda(i,j) y_{i \pm j}$. Les Lemmes 1 et 2 nous fournissent la fibration cherchée, de modèle:

$$(\Lambda x, 0) \to (\lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D}) \to (\Lambda Z, d).$$

Soit $\hat{D}_q$ la partie quadratique de $\hat{D}$ (par construction $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D}_q)$ est le coformel associé), en filtrant par le degré basique, on obtient $H_+(\Lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D}_q) = 0$, d'où la formalité de $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D}_q)$. Sa cohomologie $H_0(\Lambda x \otimes \Lambda Z, \hat{D}_q)$ coïncide avec celle de X_{n-1}^0.

Cette correspondance est bien bijective. □

Notons $\mathscr{F}_\lambda$ la fibration associée à $A_{n,\lambda}$. L'adaptation de la démonstration du Théorème 2 est laissée au lecteur; elle fournit:

Proposition 5. *Soit $(\Lambda x \otimes \Lambda Z, D_\lambda)$ le modèle bigradué de l'espace total de la fibration $\mathscr{F}_\lambda$. La différentielle D'_λ, obtenue en posant $x = 1$, a pour valeur, sur le système de générateurs de Z déjà considéré:*

$$D'_\lambda y_{i_0 \dots i_m} = \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p y_{i_0 \dots i_p} y_{i_{p+1} \dots i_m} + \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \lambda(i_j, i_{j+1}) y_{i_0 \dots i_j \pm i_{j+1} \dots i_m}.$$

Les résultats de ce paragraphe se résument alors en:

Théorème 4. *Il existe exactement deux espaces, $\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}$ et X_{n-1}^0, ayant même algèbre de Lie d'homotopie rationnelle que $\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}$. L'espace X_{n-1}^0 se fibre rationnellement de façon unique sur $K(\mathbb{Q}, 2n)$, de fibre $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$. Les fibrations $\mathscr{F}_\lambda : \bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)} \to \mathbb{CP}_{n-1}^{\infty} \to K(\mathbb{Q}, 2n)$ sont paramétrées par $\lambda \in \mathbb{Q}$ et classifiées par: $\mathscr{F}_\lambda$ et $\mathscr{F}_{\lambda'}$ ont même type d'homotopie rationnelle si et seulement si $(\lambda/\lambda')^{1/n} \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration. D'après ce qui précède, l'espace total X_{n-1} d'une fibration $\mathscr{F}_\lambda$ est formel, donc déterminé par son algèbre de cohomologie de la forme $\Lambda x \otimes A_{n,\lambda}$. Si $\lambda \neq 0$, l'application Ψ définie par $\Psi(x) = \lambda x$, $\Psi(y_i) = \lambda y_i$, fournit un isomorphisme d'algèbres entre $\Lambda x \otimes A_{n,1}$ et $\Lambda x \otimes A_{n,\lambda}$. Il n'existe donc que deux espaces $\mathbb{CP}_{n-1}^{\infty}$

et X^0_{n-1}. Le résultat global se déduit de la proposition précédente. □

Remarque. Soit $\mathbb{Q}^{\cdot}$ l'ensemble des rationnels muni de la multiplication; on note $Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}^{\cdot})$ l'ensemble des fonctions $h:\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Q}^{\cdot}$ vérifiant $h(i,0)=1$, $h(j,k)h(i,j\pm k)=h(i,j)h(i\pm j,k)$ pour tout triplet (i,j,k). Soit $g:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Q}^{\cdot}$ telle que $g(0)=1$, $g(i)\neq 0$ pour tout i; on définit $\delta g:\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Q}^{\cdot}$ par $\delta g(i,j)=g(i)g(j)g(i\pm j)^{-1}$. Le groupe $B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}^{\cdot})$, formé des éléments δg, opère naturellement par multiplication à gauche sur $Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}^{\cdot})$. Avec des techniques similaires à celles de ce paragraphe, on peut mettre en bijection:

- l'ensemble des types d'homotopie rationnelle des fibrations formelles totalement non cohomologues à zéro, de base $K(\mathbb{Q}, 2n)$, de fibre $\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}$,
- avec l'espace homogène $Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}^{\cdot})/B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}^{\cdot})$.

3. Déformation, à algèbre de cohomologie fixée, de $\mathbb{CP}^\infty_{n-1}$ et X^0_{n-1}

3.1. *Cohomologie de Harrison et fibration $\mathcal{F}_\lambda$*

Rappelons d'abord la construction de la cohomologie de Harrison [4]. Soit A une algèbre graduée commutative et soit M un A-module gradué.

La *cohomologie de Hochschild,* Hoch$(A;M)$, de A à coefficients dans M, provient du complexe $(\mathrm{Hom}^p(\otimes^m A, M),\delta)$ où:

- $\mathrm{Hom}^p(\otimes^m A, M)$ est l'ensemble des applications linéaires de degré p, normalisées ($f(a_0\otimes\ldots\otimes a_{m-1})=0$ si $a_i=1$);
- $$(\delta f)(a_0\otimes\ldots\otimes a_m)=a_0 f(a_1\otimes\ldots\otimes a_m)+(-1)^{\nu(m)}f(a_0\otimes\ldots\otimes a_{m-1})a_m + \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{\nu(j)}f(a_0\otimes\ldots\otimes a_j\cdot a_{j+1}\otimes\ldots\otimes a_m),$$

$$\text{avec } \nu(j)=\sum_{i=0}^{j}(|a_i|-1).$$

La *cohomologie de Harrison* [4], Harr$(A;M)$, s'obtient à partir du sous-complexe défini par:

- $\mathrm{Hom}^p_s(\otimes^m A, M)$ est formé des éléments de $\mathrm{Hom}^p(\otimes^m A, M)$ s'annulant sur les décomposables du produit mixé (shuffle product).

Soit $\mathcal{F}_\lambda:\bigvee_{i=1}^{n-1} S^{2(n+i)}\to X(\lambda)\to K(\mathbb{Q}, 2n)$ une fibration. Notons $(\Lambda x\otimes\Lambda Z, D)$ le modèle bigradué de l'espace total et $A_{n,\lambda}=(H(\Lambda x\otimes\Lambda Z, D))_{x=1}$ l'algèbre associée de générateurs $(1, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Si M est un $A_{n,\lambda}$-module, $\mathbb{Z}_n$-gradué, définissons:

- le $\mathbb{Z}_n$-degré de l'élément $y_{i_0}\otimes\ldots\otimes y_{i_m}$ de $\otimes^{m+1} A_{n,\lambda}$ par $[(2\sum_{j=0}^{m} i_j)-m]$ (mod n),
- $\mathrm{Hom}^p_s(\otimes^m A_{n,\lambda}, M)$ comme l'ensemble des applications linéaires normalisées, augmentant le $\mathbb{Z}_n$-degré de p et s'annulant sur les décomposables du produit mixé.

Définition 4. La *cohomologie de Harrison*, $\mathrm{Harr}^{m,p}(A_{n,\lambda};M)$, de $A_{n,\lambda}$ à coefficients dans M, $\mathbb{Z}_n$-graduée, est le quotient de l'espace vectoriel des δ-cocycles de $\mathrm{Hom}_s^p(\otimes^m A_{n,\lambda}, M)$ par $\delta\mathrm{Hom}_s^{p-1}(\otimes^{m-1} A_{n,\lambda}, M)$.

L'interprétation des obstructions d'Halperin–Stasheff en classes de cohomologie de Harrison réside dans la bijection entre $\mathrm{Hom}_s(\otimes^m A_{n,\lambda}, M)$ et $\mathrm{Hom}(Z_{m-1}, M)$. Explicitons-la sur l'exemple choisi.

Soit $(\Lambda x\otimes\Lambda Z, D+\gamma)$ un modèle filtré [3], de bigradué associé $(\Lambda x\otimes\Lambda Z, D)$; supposons γ nulle sur $Z_{<m}$. Notons D' (resp. γ') les applications induites sur ΛZ en posant $x=1$. (Pour des raisons de degré, γ ne peut apparaître qu'en Z_m avec m impair.)

En Z_{m+1}, $D'+\gamma'$ prend la valeur (Proposition 5):

$$(D'+\gamma')y_{i_0\dots i_{m+1}} = \sum_{p=0}^{m}(-1)^p y_{i_0\dots i_p} y_{i_{p+1}\dots i_{m+1}}$$

$$+\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+1}\lambda(i_j, i_{j+1}) y_{i_0\dots i_j\pm i_{j+1}\dots i_{m+1}} + w,$$

$$\text{où } w\in(\Lambda Z)_{\leq m-1}.$$

Par hypothèse, $\gamma'(w)$ est nul. Notons $\cdot$ le produit dans $A_{n,\lambda}$; l'égalité $(D'+\gamma')^2=0$ devient, en D'-cohomologie:

$$(*)\qquad (-1)^m[\gamma'(y_{i_0\dots i_m})]\cdot y_{i_{m+1}} + y_{i_0}\cdot[\gamma'(y_{i_1\dots i_{m+1}})]$$

$$+\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+1}\lambda(i_j, i_{j+1})[\gamma'(y_{i_0\dots i_j\pm i_{j+1}\dots i_{m+1}})]=0.$$

Soit $\tilde{\gamma}'\in\mathrm{Hom}_s^1(\otimes^{m+1}A_{n,\lambda}, A_{n,\lambda})$ l'application associée à γ'; l'égalité précédente s'écrit $\delta\tilde{\gamma}'=0$.

Si $\tilde{\gamma}'$ est un cobord pour la cohomologie de Harrison, $\mathrm{Harr}(A_{n,\lambda};A_{n,\lambda})$, il existe $\tilde{\Psi}'\in\mathrm{Hom}_s^0(\otimes^m A_{n,\lambda}, A_{n,\lambda})$ tel que $\tilde{\gamma}'=\delta\tilde{\Psi}'$. Notons $\Psi'\in\mathrm{Hom}^0(Z_{m-1}, A_{n,\lambda})$ l'application $\mathbb{Z}_n$-graduée correspondante.

Définissons maintenant $\Psi\in\mathrm{Hom}^0(Z_{m-1}, \Lambda x\otimes A_{n,\lambda})$ par $\Psi(y_{i_0\dots i_{m-1}})= x^\alpha\Psi'(y_{i_0\dots i_{m-1}})$; α est la puissance de x convenable pour que Ψ soit compatible avec les $\mathbb{Z}$-graduations.

$$\text{(Rappelons: } |y_{i_0\dots i_{m-1}}| = \sum_{j=0}^{m-1}(|y_{i_j}|-1)).$$

On applique alors [12] et on constate (avec la théorie de l'obstruction d'Halperin–Stasheff [3]) que la déformation γ peut être rendue triviale sur Z_m par un automorphisme de $(\Lambda x\otimes\Lambda Z, D)$. On a ainsi démontré:

Proposition 6. $\mathrm{Harr}^{m,1}(A_{n,\lambda};A_{n,\lambda})=0$ *pour* $m>2$ *entraîne la formalité intrinsèque de l'espace total de la fibration* $\mathscr{F}_\lambda$.

3.2. *Formalité intrinsèque de* $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$

L'algèbre $A_{n,1}$ associée à $\mathbb{CP}^{\infty}_{n-1}$ est l'anneau de groupe $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}_n]$. Dans ce cas particulier, nous pouvons choisir la cohomologie de Harrison à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Reprenons les notations ci-dessus; la $\mathbb{Z}_n$-graduation fournit:

$$\gamma'(y_{i_0\dots i_m})=\beta'_{i_0\dots i_m}y_{i_0\pm\dots\pm i_m\pm(1-m)/2},\quad \text{avec } \beta'_{i_0\dots i_m}\in\mathbb{Q}.$$

Notons $\tilde{\beta}'\in\mathrm{Hom}_s(\bigotimes^{m+1}\mathbb{Q}[\mathbb{Z}_n],\mathbb{Q})$ l'application associée.

D'après (*), $\tilde{\beta}'$ est un cocycle et sa classe de cohomologie de Harrison représente l'obstruction à la trivialité de γ. Suivant un théorème de M. Barr [1], l'application naturelle $\mathrm{Harr}(\mathbb{Z}_n;\mathbb{Q})\to\mathrm{Hoch}(\mathbb{Z}_n;\mathbb{Q})$, de but la cohomologie de Hochschild, est injective. Le résultat provient alors de la nullité de $\mathrm{Hoch}(\mathbb{Z}_n;\mathbb{Q})$.

3.3. *Formalité intrinsèque de* X^0_{n-1}

L'algèbre $A_{n,0}$, associée à X^0_{n-1}, de générateurs $1=y_0,y_1,\dots,y_{n-1}$ a pour loi: $y_iy_j=y_{i\pm j}$ si $i+j<n$, $y_iy_j=0$ sinon.

Etant une intersection complète, sa cohomologie de Harrison est bien connue, retrouvons la rapidement.

La filtration croissante d'algèbre, $F_pA_{n,0}=\mathbb{Q}(y_{n-1},\dots,y_{n-p})$, donne une suite spectrale de terme:

$$E_1=\bigoplus_p \mathrm{Harr}(A_{n,0};F_pA_{n,0}/F_{p-1}A_{n,0})\ \cong\ \bigoplus_p \mathrm{Harr}(A_{n,0};\mathbb{Q}),$$

et d'aboutissement $E_\infty=\mathrm{Harr}(A_{n,0};A_{n,0})$.

Le calcul de $\mathrm{Harr}(A_{n,0};\mathbb{Q})$ se mène à partir de la cohomologie de Hochschild. Or, $A_{n,0}$ est l'algèbre $S(y)/y^n$; en $\mathbb{Z}$-graduant y par 2, elle coïncide avec l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{CP}^{n-1}$: $\Lambda y/y^n$. Sa cohomologie de Hochschild, dans $\mathbb{Q}$, correspond à la cohomologie rationnelle de l'espace des lacets $\Omega\mathbb{CP}^{n-1}$, soit $\Lambda(u,v)$ avec $|u|=1$, $|v|=2n-2$. Par construction, la cohomologie de Harrison (à coefficients dans $\mathbb{Q}$), s'obtient en prenant les primitifs de cette algèbre de Hopf, d'où:

$\mathrm{Harr}^{1,*}(A_{n,0};\mathbb{Q})$ a un générateur u;

$\mathrm{Harr}^{2,*}(A_{n,0};\mathbb{Q})$ a un générateur v;

$\mathrm{Harr}^{p,*}(A_{n,0};\mathbb{Q})=0$ si $p>2$.

La suite spectrale précédente fournit la nullité de $\mathrm{Harr}^{p,*}(A_{n,0};A_{n,0})$ pour $p>2$. La formalité intrinsèque de X^0_{n-1} découle alors de la Proposition 6. □

Bibliographie

[1] M. Barr, Harrison homology, Hochschild homology and triples, J. Algebra 8 (1968) 314–323.

[2] S. Halperin, Lectures on Minimal Models, Mémoires SMF, Nouvelle série no. 9/10 (1983).

[3] S. Halperin et J. Stasheff, Obstructions to homotopy equivalences, Advances in Math. 32 (1979) 233–279.

[4] D.K. Harrison, Commutative algebras and cohomology, Trans. A.M.S. 104 (1962) 191–204.

[5] J.-M. Lemaire, 'Autopsie d'un meurtre' dans l'homologie d'une algèbre de chaînes, Ann. Scient. E.N.S. 11 (1978) 93–100.

[6] J.-M. Lemaire, Homotopie rationnelle de quelques espaces projectifs tronqués, C.R. Acad. Sci. Paris 280 A (1975).

[7] R. Ree, Lie elements and an algebra associated with shuffles, Ann. of Math. (2) 68 (1958) 210–220.

[8] J.-E. Roos, Homology of loop spaces and local rings, Proc. 18_{th} Scand. Congress Math., Aarhus (1980).

[9] J.-P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, Applications, Ann. of Math. (2) 54 (1951) 425–505.

[10] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. Publ. I.H.E.S. 47 (1977) 269–331.

[11] D. Tanré, Homotopie rationnelle, Modèles de Chen, Quillen, Sullivan, Lecture Notes in Math. 1025 (Springer, Berlin, 1983).

[12] D. Tanré, Cohomologie de Harrison et formalité intrinsèque, Preprint, Lille, 1984.